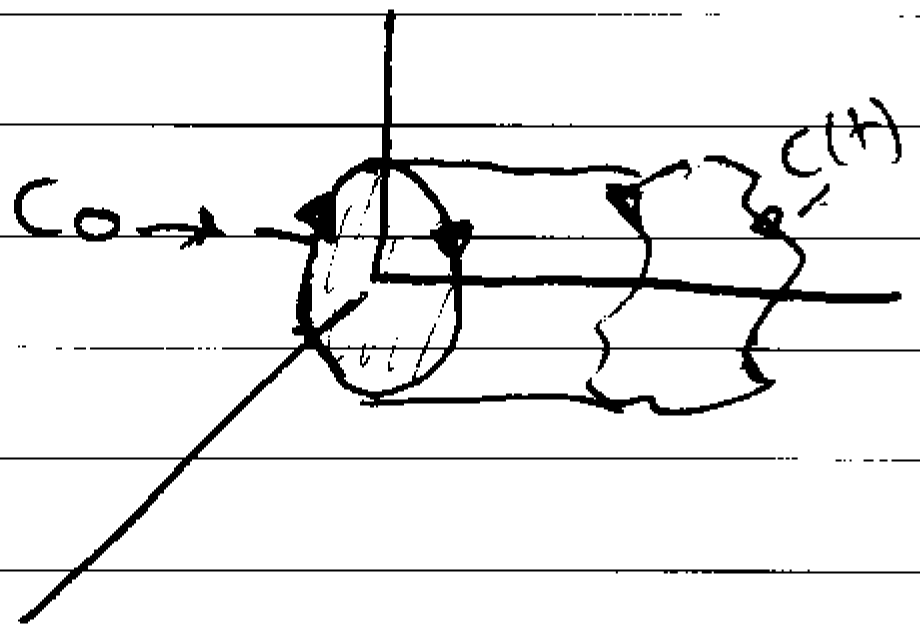
Naam:	Studentnummer:	Bladnr.:
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

4	0	II
3	3	
2	2	
1	6	

16

$F = \begin{pmatrix}-2\\0\\x\end{pmatrix}$

a)



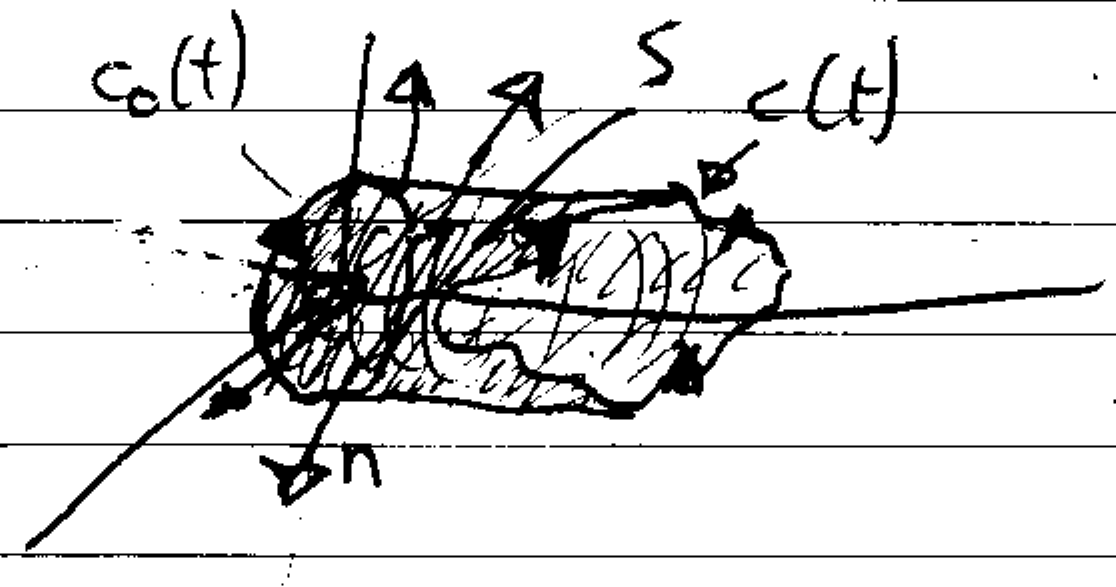
$\nabla \times F = \begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\0\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$

de curl(F) "werkt in de y-richting".

er is een bepaald oppervlak S, tussen ~~[illegible]~~ C_0 en $C(t)$ in:

$\Phi = \begin{pmatrix}\cos t\\ y\\ \sin t\end{pmatrix}$ met $t \in [0, 2\pi]$ en $0 \leq y \leq e^{-\sin t + (\cos t)^2}$

plaatje:



~~[illegible]~~ de randen van oppervlak S zijn ~~geparametr.~~ geparametriseerd door:

3 $-C_0(t)$ en $C(t)$ $\quad t \in [0, 2\pi)$

$\ominus$ vanwege de oriëntatie

Stokes: $\int_S \nabla \times F \, dS = \int_{\partial S} F \, ds$

$\int_S \nabla \times F \, dS = 0$, want $\nabla \times F = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ en $n = \pm\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}$

de normaal van S wijst loodrecht naar buiten in het x-z-vlak. De normaal van S (in het xz-vlak) staat loodrecht op curl(F) (deze wijst in de -y-richting).

Dus: $\int_S \nabla \times F \, dS = 0 = \int_{\partial S} F \, ds = \underbrace{\int_C F \, ds - \int_{C_0} F \cdot ds}_{\text{dit moet je beter uitleggen}}$

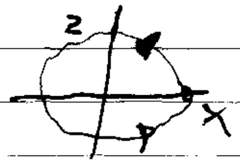
-1

$\int_C F \, ds - \int_{C_0} F \, ds = 0 \Rightarrow \int_C F \, dS = \int_{C_0} F \, ds$ (*)

Dus $\int_C F \, ds = \int_{C_0} F \cdot ds$

$c_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$

8 b) $\int_C F \, ds = \int_{C_0} F \cdot ds$



$c_0 : [0, 2\pi]$

$c_0'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad F(c(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$

$\int_0^{2\pi} F(c(t)) \cdot c'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt$

2

$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

$\int_C F \cdot ds = 2\pi$

dus: $\int_C F \cdot dS = 2\pi$

(*) je moet opmerken dat je C in negatieve zin doorloopt (niet eens C_0, mag wel)

en gebruiken: $\int_{C_0^-} F \, ds = - \int_{C_0} F \, ds$

3/5

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

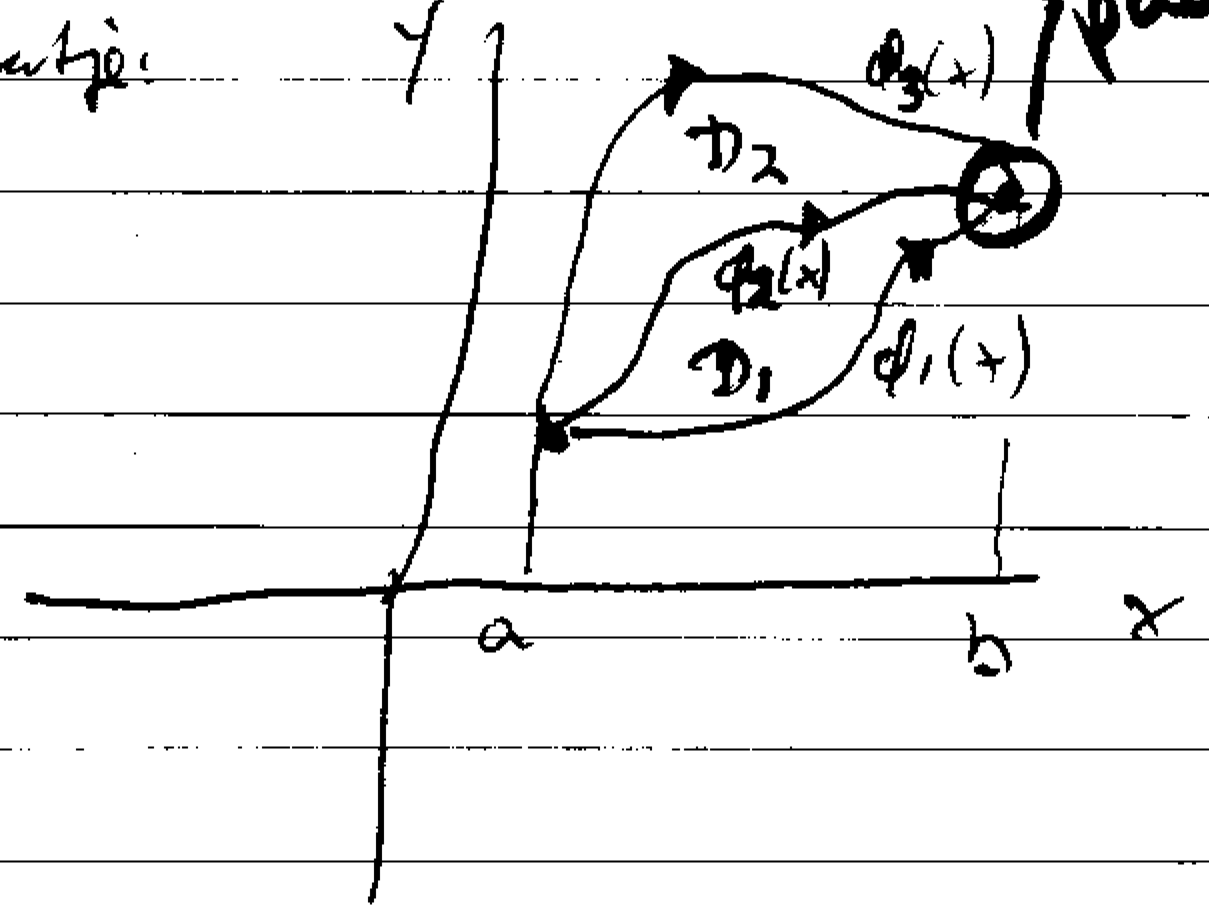
Naam:	Studentnummer:	Bladnr.:
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

Waarom zouden de paden weer aansluiten?

-1

II

plaatje:



$$\partial D_1 = \varphi_1 - \varphi_2$$
$$\partial D_2 = \varphi_2 - \varphi_3$$
$$\partial D = \varphi_1 - \varphi_3$$

$$D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ x \in [a,b] \}$$

$$D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_2(x) \leq y \leq \varphi_3(x),\ x \in [a,b] \}$$

$$\int_{\partial D_1} F \cdot ds = \int_a^b F(x, \varphi_1(x)) \cdot \varphi_1'(x)\, dx + \int_b^a F(x, \varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'(x)\, dx$$

$$= \int_a^b F(x, \varphi_1(x)) \cdot \varphi_1'(x)\, dx - \int_a^b F(x, \varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'\, dx$$

2

$$\int_{\partial D_2} F \cdot ds = \int_a^b F(x, \varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'(x)\, dx - \int_a^b F(x, \varphi_3(x)) \cdot \varphi_3'(x)\, dx$$

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_a^b F(x, \varphi_1(x)) \cdot \varphi_1'(x)\, dx - \int_a^b F(x, \varphi_3(x)) \cdot \varphi_3'(x)\, dx$$

~~$\int_{\partial D} F\, ds$ is het pad integraal van [a,b] naar $\varphi_1(x)$~~

$$\int_{\partial D_1} F \cdot ds + \int_{\partial D_2} F \cdot ds = \int_a^b F(x, \varphi_1(x))\, \varphi_1'(x)\, dx -$$

$$\int_a^b F(x, \varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'(x)\, dx + \int_a^b F(x, \varphi_2(x)) \cdot \varphi_2'(x)\, dx$$

$$- \int_a^b F(x, \varphi_3(x)) \cdot \varphi_3'(x)\, dx$$

$$= \int_a^b F(x, \varphi_1(x))\, \varphi_1'(x)\, dx + \int_a^b F(x, \varphi_3(x)) \cdot \varphi_3'(x)\, dx$$

$$= \int_{\partial D} F\, ds$$ * hopelijk klopt mijn notatie een beetje.

dus: $$\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_{\partial D_1} F\, ds + \int_{\partial D_2} F\, ds$$

Dit volgt ook direct uit Stokes,

$$\int_{\partial D} F\, ds = \int_D \nabla \times F\, dS = \int_{D_1} \nabla \times F\, dS + \int_{D_2} \nabla \times F\, dS$$

$$= \int_{\partial D_1} F \cdot ds + \int_{\partial D} F \cdot ds$$

dus: $$\int_{\partial D} F\, ds = \int_{\partial D_1} F \cdot ds + \int_{\partial D_2} F\, ds$$

3/5

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.:
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

III

3

$f(x,y,z) = x^3 y - z$

raakvlak: $(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)\cdot n = 0$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$

~~dus: $(x-1, y-1, z-1)\cdot \nabla f = 0$~~

$\cancel{\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x^3y \\ x^3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0}$

$\cancel{3x^3y - 3x^2y + yx^3 - x^3 - z + 1 = 0}$

$\cancel{4yx^3 - x^3 - 3x^2y - z + 1 = 0}$

~~vergelijking voor het raakvlak luidt:~~

$\cancel{4yx^3 - x^3 - 3x^2y - z + 1 = 0}$

$\nabla f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \|\nabla f\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

$n = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}}$

dus: $\frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\frac{1}{\sqrt{11}}(3x - 3 + y - 1 - z + 1) = 0$

$\frac{3}{\sqrt{11}}x + \frac{1}{\sqrt{11}}y - \frac{z}{\sqrt{11}} - \frac{3}{\sqrt{11}} = 0$

$3x + y - z - 3 = 0 \Rightarrow$ Vergelijking voor het

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.:
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

IV

a $f(x,y) = x^2+y^2$

$g(x,y) = x+y-(x-y)^2+\frac{1}{2}$

$\nabla f = \lambda \nabla g$, $g=0$ $\left\{ \begin{array}{l} 2x = \lambda(1-2(x-y)) \\ 2y = \lambda(1+2(x-y)) \\ x+y-(x-y)^2+\frac{1}{2} = 0 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} 2x = \lambda(1-2(x-y)) \\ 2y-2x = \lambda + 2\lambda(x-y) - \lambda + 2\lambda(x-y) = 4\lambda(x-y) \\ x+y-(x-y)^2+\frac{1}{2}=0 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} 2x = \lambda(1-2(x-y)) \\ y-x = 2\lambda(x-y) \\ x+y-(x-y)^2+\frac{1}{2}=0 \end{array} \right.$

uit derde vgln. volgt: $x \neq 0$ of $y \neq 0$

uit de tweede vgln volgt daardoor: $\lambda = -\frac{1}{2}$ of $x=y$

$x=y$

$\left. \begin{array}{l} 2x = \lambda(1-2(x-y)) \\ x=y \\ 2x - (x-y)^2+\frac{1}{2}=0 \end{array} \right\}$ $\lambda = \frac{2x}{(1-2(x-y))}$, $x=y$, $x=-\frac{1}{4}$ $\left\} \begin{array}{l} \lambda = -\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{4} \\ y=-\frac{1}{4} \end{array} \right.$

~~$\lambda=-\frac{1}{2}$~~

~~$2x = -1+2(x-y)$, $y-x = y-x$, $x+y-(x-y)^2+\frac{1}{2}=0$~~ ~~$2x=-1+2x-2y$, $y-x=y-x$, $x+y-(x-y)^2+\frac{1}{2}=0$~~

~~$y=-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}-x = -\frac{1}{2}-x$, $x-\frac{1}{2}-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}=0$~~

$\lambda=-\frac{1}{2}$ $2x = -\frac{1}{2}(1-2(x-y)) \Rightarrow 2x = -\frac{1}{2}+x-y$

$x = -\frac{1}{2}-y$

$y-x=y-x$

$x+y-(x-y)^2+\frac{1}{2}=0$

202

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} - y$$
$$y - x = y - x$$
$$-\tfrac{1}{2} - y + y = \left(-\tfrac{1}{2} - y - y\right)^2 + \tfrac{1}{2} = 0$$
$$\begin{cases} x = -\tfrac{1}{2} - y \\ y - x = y - x \\ \left(-\tfrac{1}{2} - 2y\right)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -\tfrac{1}{2} \\ x = -\tfrac{1}{4} \\ y = -\tfrac{1}{4} \end{cases}$$

de kandidaat voor f op $g = 0$ is:

$\lambda = -\tfrac{1}{2} \quad x = -\tfrac{1}{4} \quad y = -\tfrac{1}{4}$ h

b) $\nabla g = \begin{pmatrix} 1 - 2(x-y) \\ 1 + 2(x-y) \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 + 2(x-y) \\ -1 + 2(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_y \\ -g_x \end{pmatrix}$ h

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hg = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \lambda = -\tfrac{1}{2}$$

$$D = u^T (Hf - \lambda Hg)\, u$$
$$= \left(1 + 2(x-y),\ -1 + 2(x-y)\right) \begin{pmatrix} 2+2\lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 2+2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + 2(x-y) \\ -1 + 2(x-y) \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda = -\tfrac{1}{2}$ $x = -\tfrac{1}{4}$ en $y = -\tfrac{1}{4}$ volgt:

$$D = (1 + 0,\ -1 + 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

omdat $D = 0$, wordt je hier niet echt veel wijzer van. h

Dus door de methode met Hessianen en dergelijk toe te passen wordt je niet erg veel wijzer.
Als je echter kijkt naar wat voor punten voldoen aan $g(x,y) = 0$ en een beetje inzicht toepast kom je erachter dat de kandidaat een minimum is. zie volgende blz.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.:
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

vervolg!

IV. b) $x + y - (x-y)^2 + \frac{1}{2} = 0$

$x + y - (x^2 - 2xy + y^2) + \frac{1}{2} = 0$

$x + y - x^2 + 2xy - y^2 + \frac{1}{2} = 0$

$y^2 - (2x+1)y + (x^2 - x - \frac{1}{2}) = 0$

abc-formule: $\dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = y$

$A = 1 \quad B = -(2x+1) \quad C = (x^2 - x - \frac{1}{2})$

$y = \dfrac{2x+1 \pm \sqrt{(2x+1)^2 - 4(x^2 - x - \frac{1}{2})}}{2}$

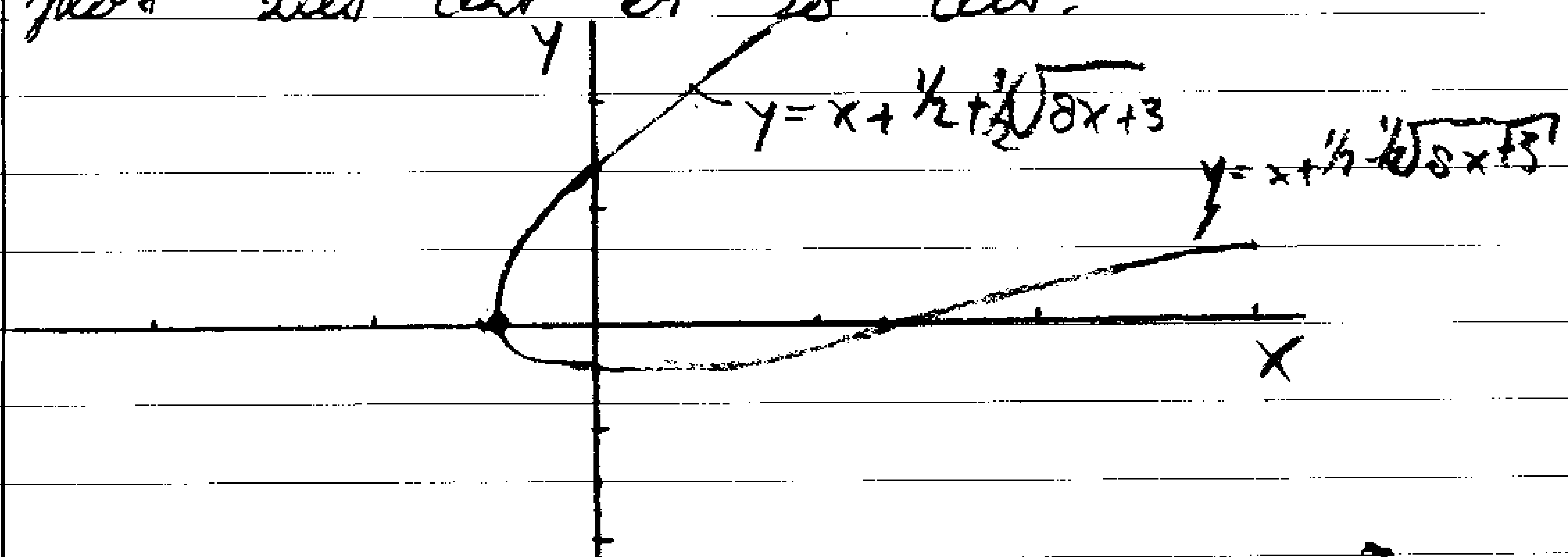
$= \dfrac{2x+1 \pm \sqrt{\cancel{4x^2} + 4x + 1 - \cancel{4x^2} + 4x + 2}}{2}$

$= x + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8x+3}$

dus $y = x + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8x+3} = h(x)$

$f(x, y) = x^2 + y^2$ $f(x,y)$ is dus in feite niet anders dan de afstand van het punt (x,y) tot het nulpunt $(0,0)$ h

als je de functies $y = x + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{8x+3}$ plot ziet dit er zo uit:



met $x \in [-\frac{3}{8}, \infty]$

Door op zoek te gaan naar een kandidaat, ben je in feite op zoek gegaan naar een punt (x,y) in ${}^h f(x)$ waarbij de afstand tot $(0,0)$ minimaal of maximaal is geworden.

Je ziet al snel dat er geen maxima van ${}^h f$ bestaan: als $x \to \infty$, dan wordt $x^2+y^2 >> 1$, $x^2+y^2 \to \infty$ de afstand van ${}^h f(x)$ tot $(0,0)$ wordt dan alsmaar groter. Er zijn dus geen maxima

Je ziet wel dat als x klein ~~wordt en~~ ~~$f(x)$ nadert tot $(0,0)$~~ wordt, ${}^h f(x)$ ~~dicht~~ erg in de buurt ligt van $(0,0)$.
Dus: voor een kleine waarde van x, is er ergens een punt (x,y) op $f(x)$ zodat x^2+y^2 een minimale waarde bereikt heeft.
Er moet dus in ieder geval één minima zijn.

Omdat ik bij IV a) slechts één kandidaat had gevonden $(-1/4, -1/4)$ voor $\lambda = -1/2$, kom ik dus tot de conclusie dat deze kandidaat een minima is.

~~Dus kandidaat~~
Type kandidaat $(-1/4, -1/4)$ = Minima